689. D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2009). La formazione degli insegnanti di matematica, problema pedagogico, didattico e culturale. *La matematica e la sua didattica*. 23, 3, 261-298.

La formazione degli insegnanti di matematica, problema pedagogico, didattico e culturale

Bruno D'Amore – Martha Isabel Fandiño Pinilla
NRD - Dipartimento di Matematica – Università di Bologna
Facoltà di Scienza della Formazione – Università di Bolzano
Alta Scuola Pedagogica – Locarno
Mescud – Università Distrital – Dottorato di Ricerca - Bogotà

Summary. *The scientific problem hidden behind the activity of teachers education is really enormous, and it deals both with mathematical knowledge and with pedagogical issues, disciplinary didactics and, more generally, cultural ability. In this paper we put forward the general problem according to a pragmatist viewpoint and we consider some possible generalizations.*

Sunto. *Il problema scientifico che si nasconde dietro l'attività di formazione degli insegnanti di matematica ha proporzioni enormi, che coinvolgono non solo aspetti di conoscenza matematica, ma anche la pedagogia, la didattica disciplinare e la competenza culturale in genere. In questo articolo si pone il problema generale in una ottica pragmatista ed alcune sue possibili interpretazioni.*

1. *Culture* per la formazione

La problematica della formazione culturale iniziale degli insegnanti di matematica ha almeno due risvolti di grande interesse preliminare, per chi si occupa di didattica della matematica:
stabilire di quale cultura *matematica* hanno davvero bisogno gli insegnanti di matematica;
stabilire di quale cultura *didattica* hanno davvero bisogno gli insegnanti di matematica.
Questi temi si intrecciano in maniera complessa con:
le attese della società, quanto a competenze matematiche da parte degli

studenti in uscita dai singoli corsi di studio (scuola primaria e scuole secondarie, assai diversamente organizzate nei vari Paesi del mondo);
le convinzioni degli insegnanti "a monte", per quanto concerne la matematica, la sua didattica, il suo apprendimento, i suoi scopi, i suoi usi, le sue applicazioni.
Assai diverso è parlare di insegnanti in servizio o di insegnanti in formazione:
i primi hanno solitamente già elaborato proprie epistemologie basate spesso soprattutto sull'esperienza personale (Brousseau, 2008a, b);
i secondi, in mancanza di una formazione specifica attenta, non possono far altro che crearsi attese e modelli basati sulla loro precedente esperienza come allievi, assumendo a modello (in positivo o in negativo) i precedenti loro insegnanti, come afferma addirittura Felix Klein (Loria, 1933).

2. Un quadro teorico di riferimento

Su ciascuno dei temi più o meno esplicitamente sottolineati in **1**, esiste una vasta bibliografia. Noi ci limiteremo solo a citare i lavori che riteniamo essenziali per chiarire la nostra prospettiva.
Ricordiamo i lavori di Furinghetti (2001) e di Carrillo e Contreras (1995) sulle convinzioni e quello di Porlàn e altri (1996) per quanto riguarda le attese della società. Le convinzioni degli insegnanti determinano strettamente la loro azione, talvolta inconsapevolmente; mentre le attese della società influenzano, più o meno palesemente, le convinzioni.
Sulle differenti aspettative degli studenti e degli insegnanti circa il rapporto tra matematica insegnata ed appresa in aula e sue applicazioni "esterne", si veda D'Amore e Fandiño Pinilla (2001); questo tipo di problematica, stupidamente banalizzata e dunque disattesa, si inserisce molto bene nel vasto campo della riflessione *etnomatematica*, alla quale faremo riferimento ancora tra breve (D'Ambrosio, 2002).
Quanto alla complessa problematica della preparazione degli insegnanti ed alla sua relazione con diversi quadri teorici di riferimento, rimandiamo a Fandiño Pinilla (2001, 2002) per un panorama vasto e tuttavia (per forza di cose) non esaustivo, fortemente connesso anche con le problematiche del curricolo e della valutazione; ed a Blanco (1991) per la sua specificità *ante litteram.* In questi lavori si mostra come il tema che stiamo qui trattando sia studiato in tutto il mondo,

assumendo oggi un rilievo addirittura di ricerca specifica da parte dei didatti della matematica, come rileva anche Portugais (1995). Di fatto, poiché questa formazione è essa stessa intesa legislativamente come un insieme di insegnamenti, non la si può pensare come un processo esente dai ben noti “fenomeni didattici” descritti nella “didattica fondamentale” (contratto didattico, teoria delle situazioni, teoria degli ostacoli etc.) (si veda D’Amore, 1999b). Ne nasce una epistemologia complessa che potrebbe portare ad una vera e propria “perdita di senso”. Riflettere su questo punto è *essenziale* per chi fa formazione iniziale degli insegnanti di matematica, il che comporta una seria preparazione in didattica della matematica in chi si occupa di formazione iniziale degli insegnanti di matematica, anche se le discipline insegnate sono diverse dalla specifica didattica della matematica.

Ancora, lo studio di Houdement e Kuzniak (1996) mette in evidenza le “strategie” che si possono/devono mettere in campo nella formazione iniziale degli insegnanti di matematica:

strategie culturali che hanno come scopo di aumentare le conoscenze dell’insegnante in formazione;

strategie basate sul *mostrare come fare*, nelle quali si invita ad osservare quel che succede in un’aula reale, suggerendo l’imitazione di pratiche che hanno successo o supposte tali;

strategie basate sulla ripetizione di modalità, nelle quali lo stesso formatore si comporta come intende suggerire al formando;

strategie basate sulla trasposizione, nelle quali si ha una sorta di riflessione critica sui singoli comportamenti; essenzialmente:

> evidenziazione della trasposizione didattica (Chevallard, 1985, come testo storico di partenza; D’Amore, 1999b, per una presentazione riassunta) nell’azione del formatore sul formando;
>
> la stessa cosa nel passaggio formativo, nell’azione del formando come futuro docente sulla sua futura aula.

Proprio questa analisi suggerisce che il modello “tripolare”: lezioni, laboratori, tirocinio, scelto in molti Paesi del mondo, potrebbe funzionare, se vi fosse davvero una integrazione critica fra i tre “poli” ed in particolare un’interazione forte tra i due “poli” più tipicamente prasseologici.

Bisogna non perdere mai l’occasione di porre in evidenza il fatto che l’insegnante (in servizio o in formazione) metterà sempre in campo sé stesso e le proprie convinzioni, sociali, didattiche e filosofiche.

Riflettendo sulla messa in campo di convinzioni di carattere epistemologico, Francesco Speranza (1997) aveva forse per primo usato la dizione di "filosofie implicite" riferendosi a quelle di quegli insegnanti di matematica che, non essendo mai stati indotti a riflettere sull'epistemologia della matematica, affrettatamente concludevano di non averne bisogno, o, ingenuamente, di non farne uso affatto.
Trasversale a tutti gli àmbiti precedenti, è lo studio di D'Ambrosio (2002) che lancia l'idea di etnomatematica come insieme di strumenti in grado di interagire con un certo ambiente, con uno scopo determinato, all'interno di un gruppo o di una società; dunque, molte delle problematiche didattiche rientrano come caso particolare in quelle dell'etnomatematica; tale disciplina permette di vedere vari problemi trasversalmente, secondo ottiche più vaste.

3. Matematica e didattica della matematica

Tenuto conto di tutto ciò, crediamo che si possa restringere il nostro campo di riflessioni solo sulla prima coppia di problematiche, ritornando a:
1. stabilire di quale cultura *matematica* hanno davvero bisogno gli insegnanti di matematica;
2. stabilire di quale cultura *didattica* hanno davvero bisogno gli insegnanti di matematica;
includendo, in almeno una delle due, ma sarebbe forse più produttivo in entrambe, la cultura *storica* ed *epistemologica* sia in chiave matematica, sia in chiave didattica;
ed inserendo nella seconda la preparazione professionale (il *che fare in aula*) anche se in contesto non teorico, ma praxeologico (sotto la forma, per esempio, di attività di laboratorio, di tirocinio, di riflessioni sulle due pratiche e di riflessioni sulle relazioni tra le due pratiche).

1. Siamo dell'avviso, sulla base della nostra (lunga) esperienza, di eliminare ogni dibattito sul primo punto, affermando che un insegnante di matematica ha bisogno estremo di forte competenza matematica e che quindi il primo nostro compito è quello di fornirgliela e di esigerla. Questo non significa però "cultura" ottenuta per banale accumulazione, bensì per approfondimento anche e soprattutto personale. Chiederemmo insomma all'insegnante di matematica di sapere la matematica non solo grazie a corsi seguiti e ad esami superati all'Università, ma per

ripensamento personale, per ricostruzione critica, per analisi. Ad un insegnante chiederemmo non tanto di poter dominare vasti campi della matematica o di essere padrone di tante tecniche raffinate, ma di padroneggiarne le basi stesse, di saper e *voler* apprendere quotidianamente la matematica, altra matematica, sempre più matematica, e di sentirsi sicuro e forte nel suo dominio.
È per questo che vorremmo includere nella cultura matematica sia la sua storia sia la sua visione epistemologica, non tanto come ulteriori conoscenze aggregate, ma come occasioni per riflettere, per paragonare, per rendersi conto, per analizzare.
Crediamo che sarebbe bene che un insegnante sapesse non solo la matematica, e che la sapesse bene, ma che sapesse organizzare il pensiero matematico dai punti di vista epistemologico e storico.
Questa posizione è oltremodo condivisa; lo vediamo dalla letteratura internazionale, tant’è vero che non insistiamo più di tanto, perché ci preme correre subito al punto 2.
Ma su questo punto appena accennato dovremo tornare.

2. Stabilire di quale cultura *didattica* hanno bisogno gli insegnanti di matematica.
Fino a poco tempo fa, diciamo 20 anni, essendo inesistente una disciplina di ricerca e di insegnamento universitario ufficiale con la denominazione didattica della matematica, la necessità di questa cultura non era avvertita. Il neo insegnante (effettuata la preparazione disciplinare in matematica) doveva semplicemente avere od acquisire esperienza, buon senso, disponibilità umana, servirsi di esempi positivi proposti dalla prassi o dall’esperienza di colleghi anziani. Al più, in molti Paesi del mondo (Fandiño Pinilla, 2001), si facevano seguire all’insegnante in formazione o al primo anno di servizio corsi rapidissimi di pedagogia, sociologia e/o psicologia. Di solito, questo miscuglio dava risultati negativi, a detta degli insegnanti stessi, e l’accusa più diffusa nel mondo era relativa alla genericità ed all’astrattezza delle nozioni apprese in questi corsi rapidissimi.
Ora, però, la disciplina didattica della matematica esiste; è possibile farne a meno?
Poiché si tratta di disciplina nuova, ancora tra i Colleghi (non solo universitari) essa è poco conosciuta ed è confusa con la pedagogia, con la didattica generale, con la scienza dell’educazione etc.

Va detto, in due parole, che la didattica della matematica come disciplina di ricerca studia le condizioni dell'apprendimento in situazioni *reali* d'aula, a qualsivoglia livello scolastico o d'Università, quando il traguardo cognitivo in gioco è specifico della matematica (Arzarello, Bartolini Bussi, 1998; D'Amore, 1999b; Artigue, 2000; Schoenfeld, 2000).
Quel *reali* che abbiamo voluto evidenziare significa che:
la didattica della matematica NON è tout court la matematica, pur essendo specifica per la matematica;
la didattica della matematica NON è la pedagogia, né la didattica generale, né la psicologia, anche se sfrutta alcuni risultati concreti e teorici di queste discipline;
la didattica della matematica NON è la divulgazione della matematica; e questa deleteria confusione è tra le più diffuse (su questa distinzione si veda Eugeni, 1999);
la didattica della matematica teorizza sui fatti reali che caratterizzano l'azione in aula, dai due diversi punti di vista, l'insegnare e l'apprendere; quindi non è affatto astratta o generica, ma assolutamente concreta e circostanziata; si tratta dunque di una scienza empirica;
la pratica in didattica della matematica dà per scontata una (forte) competenza in matematica, proprio perché chi la agisce deve farlo in maniera costruttiva, analitica e critica; ciò porta di conseguenza che il didatta della matematica (chi fa ricerca in questa disciplina) è necessariamente un matematico.
Crediamo che si debba arrivare prima o poi a poter dare per scontato che i corsi universitari preparino in matematica (il che è considerato dubbio da molti, troppi Colleghi docenti): a questo si potrebbe giungere realizzando *davvero* corsi di laurea per futuri insegnanti, corsi davvero specifici; non basta infatti la denominazione "indirizzo didattico" a garantire la preparazione specifica necessaria (stiamo parlando solo di preparazione specifica in matematica). Le cose sono analoghe in vari Paesi del mondo, mentre in altri esistono corsi di laurea *specificamente* pensati per futuri insegnanti di matematica; ci si può laureare, perciò, in "matematica per l'insegnamento" (e poi, di solito, ci sono corsi di specializzazione o master per la didattica della matematica). In questi corsi specifici di laurea, ci si preoccupa, di solito, più della preparazione in matematica, dato che le discipline di tipo didattica della matematica sono situate nel postlaurea. Tuttavia, sembrano meglio organizzati quei

Paesi nei quali almeno i primi elementi di didattica della matematica sono già forniti lungo il corso di laurea, anche a conferma della scelta.

Noi, però, non vogliamo qui entrare in discorsi relativi alla ingegneria della organizzazione dei corsi di formazione, argomento su cui ci siamo più volte espressi negli articoli a nostro nome citati in bibliografia. Vogliamo ribadire gli aspetti più culturali e significativi.

4. La didattica della matematica

Crediamo che, attualmente, uno dei compiti principali della didattica della matematica, nell’àmbito che qui stiamo discutendo, sia quello di preparare professionalmente il futuro insegnante, fornirgli le chiavi di lettura per interpretare quel che succede in aula, quando i “poli” della terna «insegnante – allievo - sapere» interagiscono tra loro in modalità talmente complesse che nessuna competenza puramente matematica (né ovviamente puramente pedagogica), né tanto meno l’esperienza ed il buon senso, possono spiegare.
Tali chiavi di lettura oggi sono chiarissime e ben note a chi si occupa di didattica della matematica, ed hanno nomi condivisi che, nel contesto degli studi specifici, si identificano, per esempio, con:
contratto didattico
teoria delle situazioni
ostacoli all’apprendimento
immagini e modelli
concetti figurali
ingegneria didattica
trasposizione didattica
…
tanto per fare solo alcuni esempi (per specificare i quali rimandiamo a D’Amore, 1999b).
Chi non ha dimestichezza con tali termini o chi crede che si tratti di parole di senso comune e non specifiche o chi crede di non aver bisogno di fare lo sforzo di studiarle o chi crede che «sono tutte sciocchezze» e che «basta e avanza una solida preparazione matematica», a nostro avviso non può arrogarsi il diritto di potersi dichiarare esperto di una disciplina il cui vocabolario è diffuso e condiviso internazionalmente e che ha oramai raggiunto risultati concreti e tangibili, di grande efficacia. L’uso di queste frasi banali ed ingenue dimostra solo una profonda ed

arrogante incompetenza.
In altre parole, per la preparazione dei futuri docenti non basta predisporre corsi post-laurea che abbiano la *denominazione* “didattica della matematica”, ma dei corsi i cui *contenuti* siano specifici e realmente significativi per la preparazione professionale.
Due aspetti riteniamo spesso dimenticati ed invece di grande importanza, l’ingegneria didattica e l’osservazione.
In Douady (1993) troviamo: «Il termine ingegneria didattica indica un insieme di sequenze di classe concepite, organizzate ed articolate nel trascorrere del tempo in forma coerente da parte dell’insegnante-ingegnere allo scopo di realizzare un progetto di apprendimento per una certa popolazione di allievi» (si veda anche D’Amore, 1999b, con ampia bibliografia). Il che comporta distinte fasi metodologiche in ingegneria didattica (Artigue, 1990): un’analisi previa; una concezione ed analisi a priori che metta in relazione le situazioni didattiche con l’ingegneria stessa; la sperimentazione delle situazioni didattiche in aula; l’analisi a posteriori che comprende ovviamente anche la valutazione. Solo per dare l’idea della complessità e della profondità cui siamo di fronte, basti dire che la sola analisi previa consta di molti punti: fissare l’oggetto di apprendimento che diventa oggetto di ingegneria; farne un’analisi epistemologica allo scopo di conoscerlo; fare l’analisi delle modalità usuali di insegnamento di quell’oggetto con discussione dei risultati apprenditivi con quelle modalità; fare l’analisi delle concezione degli allievi, le difficoltà e gli ostacoli connessi con la sua evoluzione; fare l’analisi dei limiti e condizionamenti dell’àmbito nei quali si sta per realizzare in modo concreto l’azione didattica, facendo riferimento alla dimensione epistemologica di quel sapere, alla dimensione cognitiva (tipica dei destinatari dell’azione), alla dimensione didattica (relativa al funzionamento del sistema); la determinazione degli obiettivi dell’azione.
L’ingegneria è necessaria ma complessa; essa, inoltre, non è affatto banale risultato dell’esperienza; come tale, deve rientrare nel curricolo del futuro insegnante di “matematica” come insegnamento specifico, probabilmente, con maggior opportunità, nell’àmbito che sta tra attività di laboratorio e di tirocinio, ma con ovvii ed espliciti riferimenti alla didattica della matematica.
Molto legata alla pratica d’aula e dunque all’ingegneria, è la osservazione d’aula. Troppi sedicenti didatti sottovalutano questo

aspetto, la cui complessità è invece ben stata messa in evidenza già decenni fa da Droz (1980). Osservare l’aula ed il comportamento degli allievi è da più Autori ritenuto essenziale per una significativa azione didattica e dunque diventa fondamentale formare i futuri insegnanti a questa pratica (Douady, Robert, 1992). Si insiste sempre sull’analisi dei protocolli, ma questa attività rientra, si integra ed ha bisogno dell’osservazione in aula [in una loro classificazione, Brun, Conne (1990) mescolano ed integrano le due azioni].
Anche questo aspetto, a nostro avviso, deve rientrare tra le competenze che si vogliono far costruire ai futuri docenti, dunque deve diventare esplicita parte delle attività di formazione iniziale degli insegnanti di matematica; anche per questo, crediamo che la sistemazione ottimale sia all’interno della coppia laboratorio – tirocinio, con ovvii e forti legami con la didattica della matematica.

5. La competenza in didattica della matematica modifica l’atteggiamento degli insegnanti

Non tutti i risultati dell’attività di ricerca, in qualsiasi campo, hanno diretta e concreta ricaduta nella vita quotidiana: ciò a volte fa sembrare lontana, al cittadino comune, l’attività dei ricercatori.
Per esempio, nel campo della medicina, è ufficialmente riconosciuto che solo una minima parte della ricerca ha risvolti apprezzabili concretamente nell’immediato.
Si pensi, ancora per esempio, alla oggi tanto diffusa pila; Alessandro Volta (1745-1827) la concepì tra l’anno 1796 ed il 1800, ma solo dopo il 1865 si trovò il modo di rendere applicabile, concreta, conveniente nella pratica quotidiana tale geniale idea.
Lo stesso accade dunque ovviamente nella ricerca in didattica della matematica. In essa si possono individuare tre tendenze, tre filoni (Godino, Batanero, 1998; Bartolini Bussi, 1994):
azione pratica riflessiva sui processi di insegnamento ed apprendimento della matematica;
tecnologia didattica: lo scopo è di mettere a punto materiali per un’istruzione matematica più efficace, sfruttando le conoscenze acquisite;
ricerca scientifica: il suo scopo è di comprendere il funzionamento del complesso sistemico: insegnante – allievo – sapere, il “triangolo della didattica” (D’Amore, Fandiño Pinilla, 2002).

Si tratta di un'analisi a carattere epistemologico a livello globale (si potrebbe dire: di ecologia dei saperi istituzionali). Secondo Godino e Batanero, anche se questi tre campi si interessano di uno stesso oggetto, essi sono intrinsecamente distinti:

nel primo sembra evidenziata la problematica "pratica", "quotidiana", "professionale" dell'insegnante di fronte ad allievi ai quali deve far apprendere qualche cosa in modo efficace (c'è chi la chiama *microdidattica*, ma non in senso riduttivo);

nel secondo sembra evidenziarsi il campo d'azione di chi elabora curricoli e di chi scrive manuali o materiali didattici vari;

nel terzo sembra focalizzata l'attenzione di chi elabora teorie didattiche, soprattutto all'interno delle istituzioni universitarie, di vera e propria ricerca *per il Sapere*.

Seguendo anche le suggestioni di Bartolini Bussi (1994), Godino e Batanero (1998) finiscono con il concludere che le prime due componenti dell'educazione matematica potrebbero «essere tra loro legate come "ricerca per l'azione", mentre la terza componente è equivalente alla "ricerca per la conoscenza"».

Se si è ricercatori, occorre fare preliminarmente una scelta di campo, dunque, per decidere *per che cosa si fa ricerca*; se tale scelta prevede un *ritorno* all'aula, una volta ottenuti risultati, diventa importante rendersi conto ed accettare che solo una parte di questi risultati della ricerca *possono* davvero essere trasformati in oggetti di studio da parte dell'ingegneria didattica o, per lo meno, avere influenze sulla pratica docente.

La disciplina didattica della matematica ha oramai almeno tre decenni di storia, molti ricercatori attivi in tutto il mondo, un linguaggio ampiamente condiviso, proprie riviste (sia di ricerca, sia di divulgazione dei risultati, sia "miste"), propri seminari, convegni,…; dunque la sua diffusione reale è sempre più massiccia.

Che cosa succede, dal punto di vista professionale, al docente che fa ricerca o al docente che, più semplicemente, viene a sapere dei risultati della ricerca?

Grazie alla detta diffusione, la comunità degli studiosi di didattica della matematica ha finalmente la possibilità di rispondere alla precedente domanda; lo faremo qui nel modo meno complicato possibile: il docente - ricercatore ed il docente, una volta conosciuti i risultati della ricerca, *cambiano*. Cambiano radicalmente il proprio atteggiamento che si fa più

attento, più critico, meno disponibile a dare per scontato che vi siano attività vincenti solo perché suggerite da qualcuno ad alto livello accademico o perché vi è di tali attività una pratica oramai tradizionale.
Per esempio, si veda come la cosiddetta “insiemistica”, messa in crisi da tanti seri studi nell’àmbito della ricerca in epistemologia dell’apprendimento, sia stata lentamente abbandonata nella pratica didattica anche dai suoi più convinti sostenitori; per lo meno, è stata ridimensionata la cieca fiducia in essa riposta negli anni ‘70 ed ‘80: da disciplina - panacea onnivora, è diventata comodo linguaggio da usarsi solo quando conviene davvero (Pellerey, 1989).
Per esempio, si veda come l’uso di strumenti didattici pre-confezionati, la cui utilità didattica era incondizionatamente accettata da molti insegnanti, è oggi meno a-critico (D’Amore, 2002a).
Per esempio, si veda come si è modificata l’attesa degli insegnanti delle scuole secondarie superiori di tutto il mondo, dopo gli studi sull’apprendimento delle dimostrazioni; mentre fino a qualche decennio fa si dava per scontata la competenza linguistico – logica degli studenti di 14 anni a prendere possesso dell’idea di dimostrazione, almeno in geometria, oggi si considera che tale idea necessita di una pratica didattica esplicita (e non più certo a 14 anni, ma ben oltre) (Duval, 1991, 1992-93; Hoyles, 1997).
Cambiano, dicevamo, gli atteggiamenti: fatalmente, l’insegnante che entra in contatto con certi risultati di ricerca non può più ignorarli, dopo; vede, riconosce nel comportamento dei propri studenti in aula e nel proprio agire professionale, la conferma di quei risultati e di conseguenza la propria interpretazione delle condotte subisce una modifica.
Esamineremo in dettaglio queste “modifiche” di atteggiamento.
Questa modifica riguarda il curricolo.
L’insegnante diventa più attento alla congruità delle proprie scelte didattiche; consapevole che esistono, per esempio, ostacoli ontogenetici, ostacoli didattici ed ostacoli epistemologici, o che esiste, per esempio, il contratto didattico; non si accontenta più di accettare l’apparente congruità, nel senso di consecutività, degli argomenti, che prima lo appagava e lo tranquillizzava, ma comincia a porsi problemi di analisi del curricolo sulla base dei risultati cognitivi dei propri studenti, sulla base dei risultati della propria azione didattica, accettandone dunque contemporaneamente una revisione critica e metodologica (Fandiño

Pinilla, 2002).
Questa modifica riguarda la definizione dei compiti del docente e dell'allievo.
L'insegnante che entra in contatto con i risultati della ricerca, mette in discussione, in modo efficace e significativo:
i propri compiti, le proprie attese;
i compiti dello studente, le sue aspettative, le sue immagini della disciplina e del suo insegnamento.
Diventa dunque, più in generale ed in ogni caso, attento a quel che succede sul fronte di colui che potremmo definire l'attore impegnato nell'azione di costruire conoscenza, il suo allievo (troppo spesso, in precedenza, ignorato come attore).
Questa modifica riguarda le esigenze nuove che l'insegnante chiede alla propria preparazione professionale.
Abbiamo la prova dei fatti che:
l'insegnante in servizio, chiede all'Università sempre meno attività cosiddette di aggiornamento, testi, seminari, convegni… sui contenuti matematici e si rivolge invece a specialisti della didattica, consapevole del fatto che più risultati di ricerca didattica conoscerà e maggiore sarà, dapprima la capacità critica di analisi della situazione aula, e poi la propria professionalità;
l'insegnante in formazione iniziale non lo sa, appunto perché è in formazione iniziale, ma la scelta vincente della società contemporanea di tutti i Paesi del mondo è di centrare la formazione dei docenti di matematica sulla didattica della matematica, ovviamente dopo una preliminare e salda preparazione disciplinare che resta in ogni caso alla base.
Questa modifica riguarda le attese che la pratica docente ha sulla società e viceversa.
Sembra inutile che la società esprima una propria attesa generale nei riguardi della scuola, se questa attesa non è conforme ai risultati della ricerca didattica. La professionalità nuova e più attenta dell'insegnante informato lo porta a ridefinire anche questo rapporto e, soprattutto, a ridisegnare il suo ruolo come efficiente esecutore dei piani educativi che la società gli ha affidato (Brousseau, 2008a, b).
Questa modifica riguarda la valutazione (ed è questo il punto sul quale vogliamo qui riflettere di più):
la valutazione del lavoro fatto dallo studente: l'insegnante informato dei

risultati della ricerca in didattica guarda con occhio diverso, più analitico, critico, osservativo, al lavoro di costruzione della conoscenza di ciascuno dei propri allievi; perfino la valutazione più banale, intesa come misurazione di conoscenza, come “voto” da dare allo studente sulla base di risultato ed impegno, ne risente parecchio;
la valutazione del proprio lavoro fatto in aula: conformemente ai risultati di apprendimento ottenuti dai propri allievi, l’insegnante informato dei risultati della ricerca in didattica è in grado di analizzare criticamente il proprio operato all’interno dell’aula, ridisegnando le proprie strategie metodologiche e le proprie scelte;
la valutazione del curricolo: l’insegnante informato della ricerca in didattica è in grado di ripensare allo sviluppo curricolare in ogni suo aspetto, facendosi carico in prima persona di una critica a tale sviluppo e creando condizioni costruttive opportune per una seria e talvolta profonda modifica.
Ma non tutti gli insegnanti di matematica sono informati dei risultati della ricerca in didattica della matematica: alcuni preferiscono non vedere, non sapere, non sentire… Per questo sparuto gruppo di professionisti recalcitranti, la Società prende provvedimenti diversi:
si va da Paesi che li accettano senza condizioni, dato che non esistono legislazioni opportune;
a Paesi nei quali sono previste sospensioni parziali o definitive per quegli insegnanti che non dimostrano una professionalità adeguata alla natura del compito.
Che fare, che decisioni prendere? Bisogna prima di tutto capire bene il problema, almeno da un punto di vista sociale.
L’esempio che viene più spontaneo è, ancora una volta, quello medico. Oggigiorno si interviene per rimuovere un’ernia del disco nella zona lombo sacrale in chirurgia per nulla invasiva, con effetti per nulla devastanti, permettendo al paziente di alzarsi sulle proprie gambe poche ore dopo l’intervento e di tornarsene a casa. Fino a 20 anni fa, o anche meno, l’intervento aveva effetti terribili, lunghe ospedalizzazioni, ingessature per decine di giorni con conseguenti attività terapeutiche di riabilitazione fisioterapica.
Analoghi esempi si possono fare nel campo della oftalmologia: si pensi solo a che cos’è oggi ed a che cosa era 20 anni fa la rimozione della cosiddetta cateratta.

Nessuno può vietare ad un paziente di affidarsi alle mani di un chirurgo che preferisce pratiche superate e desuete, devastanti, a pratiche più moderne sicure e non devastanti. Ma: chi affiderebbe il proprio figlio a chi usa queste tecniche superate, sapendo che cosa offre in alternativa la chirurgia attuale?
Per analogia: perché affidare i propri figli (dal punto di vista familiare) o i futuri cittadini (dal punto di vista sociale) a mani non colte, ma solo esperte, che certo non faranno danni, risolveranno comunque il problema, ma in maniera macchinosa, pericolosa e, oramai, disumana?
Torniamo dunque all'inizio; se questi sono gli effetti professionali benefici di cambiamento che un'acquisita competenza in didattica della matematica provoca sugli insegnanti di matematica già in servizio, perché non approfittarne per formare fin dall'inizio i futuri insegnanti? Sarebbe quanto meno ridicolo avviarli nel mondo del lavoro, competenti in matematica, nella speranza che, prima o poi, vengano formati o meglio informati in didattica: tanto vale approfittare dell'occasione, della presenza di esperti, della circostanza legale, e formarli subito.

6. Il problema di "curricolo e valutazione"

All'interno del corso di didattica della matematica o di laboratorio di didattica della matematica, devono trovare spazi tematiche che sembrano essere secondarie e che invece costituiscono l'ossatura stessa della professionalità. Se è vero, com'è vero, che un insegnante sceglie o segue un curricolo e che passa la maggior parte del suo tempo ad osservare la vita d'aula per valutare (almeno nelle due accezioni di *assessment* ed *evaluation*) (Fandiño Pinilla, 2002), allora egli deve essere messo in grado di apprezzare e conoscere le problematiche teoriche e le conseguenze pratiche della sua scelta e della sua azione.
Questa riflessione apre una ferita profonda, tipica del nostro Paese, assai meno dolorosa in altri Paesi che da tempo hanno posto rimedio ai guai provocati dall'indifferenza verso questi temi. Difficilmente i matematici prima e gli specialisti in didattica della matematica poi hanno dedicato tempo allo studio ed alla teorizzazione in questo campo; essa è stata delegata a studiosi più generici, quasi sempre in àmbito pedagogico prima e di didattica generale, poi. Dunque, attualmente, le competenze in questo specifico campo sono molto ridotte. Auspichiamo, dunque, nell'interesse di una qualità significativa nell'àmbito della formazione iniziale degli insegnanti, che più d'un collega decida di dedicarsi a

questo genere di studi teorici, naturalmente ritenendo che l’interesse preciso stia nella specifico della didattica della matematica, come già succede in vari altri Paesi del mondo.
Sia lo studio del curricolo, sia quello legato alla valutazione, ben si prestano ad un altro esempio a carico dell’azione astratta e culturale (nel corso di didattica della matematica) sia dell’azione concreta e critica, di osservazione ed analisi (nei laboratori e nella riflessione sull’attività di tirocinio).
In questo stesso paragrafo, dato che stiamo trattando di curricolo, trova spazio infine un invito a tutti i Colleghi a cercare di trovare non tanto un’unica lista di contenuti per i corsi di didattica della matematica ai vari livelli, ma almeno tale che da essa si rilevi un unico spirito, il più possibile condiviso.

7. Il ruolo dell’epistemologica nella formazione degli insegnanti di matematica nella scuola secondaria

Vi sono due motivazioni irrinunciabili alla necessità di una preparazione culturale forte in epistemologia della matematica per i futuri docenti di matematica; e sono:

- fattori culturali (7.1 e 7.2);
- fattori didattici o professionali (7.3 e 7.4).

7.1. I fattori culturali

Lo sviluppo della nostra disciplina è non solo fatto di progresso tecnico e formale; anzi, al contrario, questi due sono il risultato di una continua revisione di senso e significato che la matematica cerca all’interno di sé stessa. Il rigore, per esempio, che è uno degli aspetti che colpisce di più il profano o lo studente, non è un fatto intrinseco o un vezzo dell’insegnante, ma necessità linguistica e filosofica (D’Amore, Plazzi, 1990), un filtro (a volte faticoso) che il matematico dà al proprio strumento linguistico per evitare fraintendimenti (dunque pluralità di senso) e per dare univocità di significato nella comunicazione. È per questo che il rigore non è fatto assoluto, ma relativo all’epoca ed al luogo, in costante evoluzione.
Lo sviluppo della matematica, d’altra parte, procede in varie direzioni, ma è innegabile che, in prima istanza e con grande portata, esso è teso

alla creazione di concetti;[1] ora, non si può produrre un concetto senza delinearlo epistemologicamente, dunque, volente o nolente, chi riflette sullo sviluppo della matematica deve necessariamente porsi il problema della natura dei concetti (quegli stessi che, in matematica, spesso vengono chiamati *oggetti*) (D'Amore, 2001a, b).
Va da sé dunque che, a parte il matematico professionista che potrebbe anche produrre e che talvolta produce teoremi e/o teorie all'interno di un determinato dominio senza uscirne e studiarne il senso generale epistemologico, *chiunque* altro si occupi di matematica e del suo sviluppo *deve* necessariamente porsi il problema epistemologico come fatto culturale.
L'insegnante di matematica non è un creatore di teoremi e/o teorie, ma un professionista, esperto di matematica, al quale la società propone di far sì che giovani cittadini costruiscano ed apprendano ad usare competenze matematiche.[2]
In primo luogo, egli deve conoscere la matematica; nonostante su questo punto si siano sviluppate varie prese di posizioni, noi lo riaffermiamo come punto irrinunciabile di partenza (D'Amore, 1999a).
Ma l'insegnante ha due doveri principali che consistono nel:
effettuare una *trasposizione didattica*; l'insegnante non può limitarsi banalmente a ripetere la matematica appresa all'Università (suo luogo di formazione culturale, per quanto concerne la matematica); egli *deve* trasformare la matematica (il sapere matematico elaborato dall'accademia) in un sapere adatto agli allievi affidati alle sue cure; egli cioè deve trasformare il Sapere in un "sapere da insegnare" (D'Amore, 1999b); questa trasformazione non è fatto banale, anzi, al contrario, è ampiamente creativa e fa strettamente parte, condizionandola, della professionalità docente (Fandiño Pinilla, 2002);
comunicare la matematica; noi tutti sappiamo che, in una situazione d'aula, il carattere mediatore dell'insegnante è molto forte e che lo studente quasi mai ha accesso diretto al Sapere, limitando il proprio impegno alla relazione personale con l'insegnante ed all'apprendimento della matematica che l'insegnante ha scelto (in modo più o meno

---

[1] Evitiamo accuratamente di dire *scoperta* e preferiamo dire *creazione*; la scelta epistemologica a monte è evidente (D'Amore, 2003); essa comunque non è più dibattuta acremente come in passato.
[2] Usiamo il termine *competenza* in luogo di *conoscenza* non a caso (D'Amore, Godino, Arrigo, Fandiño Pinilla, 2003).

consapevole, più o meno vincolato) per lui; dunque, il passaggio dal docente al discente della matematica insegnata avviene in situazione comunicativa piuttosto forte, sottomessa alle complesse maglie della pragmatica della comunicazione umana (Watzlawick, Beavin, Jackson, 1976).
In base a questi due punti, si vede chiaramente come l’insegnante non possa ignorare il *senso* che ha lo sviluppo della matematica:
non potrebbe altrimenti compiere quell’atto creativo che è la *trasposizione*; lo può fare se e solo se è in grado di scegliere criticamente all’interno di un corpus sul quale ha una qualche legittimità e capacità di decisione; se egli ritiene che la matematica non offra alternative epistemologiche, che il corpus delle conoscenze è quello che è, immutabile, eterno, indiscutibile, quel che lui ha appreso (semmai prima della “parentesi universitaria”), allora non compierà la trasposizione e dunque fallirà come insegnante;
non potrebbe altrimenti *comunicare* la matematica; si può comunicare quel che si è costruito dentro, quel che fa parte della esperienza personale, vissuta, cioè personalizzata; se la matematica è vista come qualche cosa di impersonale, di atemporale, solo una successione di risultati concatenati ottenuti da esseri umani che, mentre producono, non pensano che all’interno della teoria in cui creano, allora non si parla più di comunicazione bensì di ripetizione di risultati; nella pragmatica della comunicazione umana è implicito un senso di proprietà critica, di capacità e disponibilità alla scelta personale; d’altra parte, uno dei limiti della matematica trasmessa a scuola, più volte denunciato da Brousseau (1986, per esempio) è proprio questo suo carattere di impersonalità ed atemporalità, questo voler nascondere la ricca storia degli sforzi e delle difficoltà che gli esseri umani hanno incontrato nel costruire la matematica per come è oggi; lo studente che vede della matematica solo i risultati finali, lindi e cristallini, puliti da ogni fatica e discussione, ordinati, apparentemente dedotti da un’assiomatica che sembra essere calata dall’alto, è indotto a credere che la matematica *debba* per sua natura essere così; se questo studente è un futuro insegnante di matematica, porterà con sé, nella sua storia professionale, questa sbagliata concezione di matematica.
Abbiamo molti Autori a nostra disposizione da citare a difesa di questa visione che dà importanza alla cultura in epistemologia della matematica da parte di futuri docenti.

Certamente Speranza (1997) che ha impegnato tutto sé stesso per porre questo insegnamento in modo ufficiale ed esplicito nei programmi della scuola di specializzazione (post laurea) per l'insegnamento nella scuola secondaria. In quello stesso testo, specie da pag. 124 a pag. 127, Speranza ci dà la possibilità di considerare anche Federigo Enriques schierato in questa ottica, con una molteplicità di citazioni che qui non riporto. Ulteriore conforto ci viene da Giovanni Vailati, per esempio quando mostra l'importanza che ha riflettere su atteggiamenti anche rivelatisi erronei nel passato, nella costruzione di concetti matematici, anche in attività didattiche (Vailati, 1896). Così come da Gaston Bachelard che, anzi, è da molti considerato il propugnatore della revisione del modo di concepire l'errore nelle scienze come qualcosa di valorizzabile intrinsecamente (Bachelard, 1951), tanto da arrivare, in questo campo, a condizionare il pensiero di Brousseau (1983, 1989), il creatore della moderna didattica della matematica.

7.2. Dirette conseguenze dei fattori culturali in campo didattico, metadidattico e come fattori "trasversali"

Le scelte delineate nel paragrafo 7.1. hanno dirette conseguenze in campo didattico; ne esamineremo solo alcuni esempi, il primo in maniera più approfondita in 7.2.1., mentre degli altri faremo solo cenni in 7.2.2. Passeremo poi a 7.2.3. per trattare gli aspetti metadidattici ed a 7.2.4. per quelli "trasversali".

7.2.1. Il problema degli "elementi primi"

Come abbiamo già a lungo esaminato in altra occasione (D'Amore, 2000a), nel secolo XVIII ci si appassionò alla domanda: che cosa vuol dire "semplice da capire"? Il "semplice" è un fatto assoluto o relativo? Il "semplice" è tale indifferentemente, tanto per lo scienziato quanto per lo studente alle prime armi? O c'è differenza? Se sì, quale?
Queste domande trovano tentativi di risposte addirittura nella *Encyclopédie* di Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert [1717-1783] e Denis Diderot [1713-1784], e soprattutto negli articoli *Analisi*, *Sintesi*, *Metodo*, *Elementi di scienze*. [Si tratta, a nostro avviso, già di uno specifico studio di didattica che si differenzia da interessi generali della pedagogia].
Potrebbe essere interessante, tanto per avere un'idea della cosa, vedere come d'Alembert, autore della voce *Elementi di scienze*, tenti di far

scaturire idee didattiche dall'ipotesi cartesiana di sintesi, dal semplice al complesso, ma come sia costretto lui stesso ad ammettere che la cosa si complichi immediatamente.
Sappiamo di forzare un po' la mano, ma è come se si cominciasse ad ammettere qualche cosa di molto moderno, che c'è una profonda differenza tra:
la disciplina in sé per come è conosciuta e praticata dagli specialisti, dagli scienziati;
la didattica generale in sé, per come consti di asserzioni generali credibili e garantite da riflessioni significative condotte da esperti nel settore;
la didattica disciplinare in sé, che ha tutt'altri parametri, paradigmi e scopi.
Il vero punto in discussione è evidenziato quando d'Alembert tenta di vedere che cosa significa che un concetto *precede* un altro: da quale partire, da quale prendere le mosse, quali sono i *concetti primi*?
Per esempio, in matematica, lo scienziato usa prendere le mosse da idee come spazio, piano, retta, punto, numero, ... ed alcuni "collegamenti" tra essi; siamo proprio sicuri che nella didattica della matematica questo sia conveniente? Gli elementi primi dello scienziato sono o devono necessariamente essere gli elementi primi dell'allievo?
Più che accettare gli elementi primi dello scienziato, non vale forse la pena di ripercorrere la generazione delle idee che hanno portato a scegliere quegli oggetti come oggetti primi?
Non è qui il caso di approfondire, ma è singolare come proprio questo dibattito di stampo didattico faccia passare d'Alembert da una posizione tutta cartesiana ad una lockiana e poi come tenti di conciliare le due: «Le idee semplici possono ridursi a due specie: le une sono delle idee astratte (...) la seconda specie di idee semplici è racchiusa nelle idee primitive che noi acquisiamo attraverso le nostre sensazioni».
Ma: gli elementi che gli studenti che si avvicinano per la prima volta allo studio delle scienze sono in grado di comprendere, sono o no gli elementi delle scienze? O: sono almeno della stessa natura?
Se si risponde di sì, allora il metodo didattico è una ristrutturazione, una sistemazione, una messa in scena progressiva degli elementi delle scienze, del sapere degli scienziati (Kintzler, 1989);
se si risponde di no, come si passa dalle competenze infantili, dagli elementi cognitivi in possesso di uno studente alle prime armi, al sapere

scientificamente inteso?
In ogni caso, che legame c'è tra gli elementi primi acquisibili dallo studente e gli elementi primi delle scienze accademicamente intese (Sapere o *Savoir savant*)?
A nostro avviso, a partire da questo dibattito, si comincia finalmente a delineare una terna di contenuti:

- i contenuti della disciplina *d*, stabiliti da essa stessa, dalla sua storia;
- i contenuti della didattica di quella disciplina: D_d; essa ha come oggetto di studio la sistemazione (nell'ottica: insegnamento → apprendimento efficace) degli elementi della disciplina *d*, ma i contenuti specifici di D_d non sono più meramente i contenuti della disciplina *d*, sono nuovi rispetto a *d*;
- i contenuti di un'altra teoria, più generale, che si potrebbe identificare in quella che pone il problema di come passare, al di là del caso specifico, dai contenuti di *d* ai contenuti di D_d, qualunque sia la disciplina *d*; si potrebbe allora cominciare a pensare ad una sorta di didattica generale, intesa in questo senso.

È grazie ad una relazione tra riflessioni epistemologiche e didattiche sulla matematica che si arriva al dibattito sugli *elementi primi*, per capire come non ci sia coincidenza tra elementi primi per uno studente alle prime armi e termini primitivi in matematica. Senza questa possibilità di riflessione critica, l'insegnante sarebbe portato a pensare che vi sia coincidenza.

7.2.2. Le "frazioni", i razionali, il passaggio ai reali, la densità, la continuità

Senza una forte preparazione in epistemologia della matematica, tutti i temi citati nel titolo di questo paragrafo potrebbero essere fonte di equivoco: l'insegnante trasmette un sapere agli allievi, dopo una trasposizione didattica che egli giudica idonea. Ma, in caso di insuccesso, al non costruire conoscenza (né ovviamente tanto meno competenza) da parte degli studenti, non ha alternative se non il pensare che gli studenti non siano idonei a questo genere di questioni, non all'altezza. O, peggio, pensa di non essere adeguato lui alla professione docente.
Proprio le competenze epistemologiche rivelano, invece, le incredibili insidie che si nascondo dietro questi temi. In Fandiño Pinilla (2002), per esempio, si studia proprio il caso esemplare del dibattito didattico /

epistemologico tra “frazioni” (oggetto scolastico) e “razionali” (oggetto del Sapere).
Le incredibili convinzioni che hanno anche studenti maturi (fine secondaria superiore, anche dopo corsi di analisi) su densità e continuità, proposti in aula come puri oggetti matematici da apprendere, senza alcuna attenzione epistemologica cautelativa, sono evidenziate da infiniti autori in ricerche didattiche su campo.

7.2.3. Fattori “meta”, determinanti per la didattica

Oltre al problema delineato in 7.2.1. su che cosa siano i termini primitivi, vi sono altri fattori che chiamo metamatematici; per esempio: che cosa sono le definizioni, che cosa sono le dimostrazioni.
Sull’interpretazione di questi due termini, molto ci sarebbe da dire; senza una profonda competenza epistemologica, si corre il rischio di fraintendere grossolanamente il *senso* di queste due fondamentali componenti della matematica. Quante volte abbiamo sentito studenti, anche maturi, confondere questi due termini tra loro, a conferma della mancanza di *senso*. Purtroppo, in varie occasioni, abbiamo sentito insegnanti correggere l’enunciato di una definizione dato da uno studente con frasi del tipo: «Non si dice così, devi dire così»; e pensare che, proprio a proposito delle definizioni, sentimmo per la prima volta Francesco Speranza parlare di “libertà della matematica” (D’Amore, 1986). E che dire delle dimostrazioni recitate a memoria? Quanti tra noi docenti universitari hanno sentito pronunciare da uno studente la micidiale frase: «Questa dimostrazione non me la ricordo»? Anche questa è segnale di un fraintendimento di base sul *senso* della dimostrazione (e dunque, più in generale, della matematica e della conoscenza matematica).
Come si causano queste deleterie convinzioni presso gli studenti? Non certo per generazione spontanea: esse sono il frutto o di diretti insegnamenti fallaci o di interpretazioni indotte da comportamenti ripetuti e forse causati dal contratto didattico.
Solo una forte preparazione dei docenti in epistemologia della matematica (e in didattica della matematica) può, da un lato fortificare le convinzioni positive degli insegnanti su questi temi, dall’altro renderli didatticamente vigili.
Sia nelle definizioni sia nelle dimostrazioni vi deve essere un ampio “grado di libertà”, favorito dal docente, conquistato dallo studente; è

questo che ci insegna l'epistemologia.

7.2.4. Fattori "trasversali"

Tra le tante altre conquiste culturali forti che sono permesse e favorite dalla cultura epistemologica, porremmo l'accento anche sulle seguenti tre riflessioni su:
come è fatto il linguaggio della matematica
come si apprende la matematica
i legami forti che esistono tra semiotica e noetica.
Ci limiteremo a brevi considerazioni.
Ci sono molti fraintendimenti sul linguaggio che usiamo in matematica; e tante convinzioni che determinano misconcezioni. Su questo tema abbiamo lavorato a lungo (D'Amore, 1993; 1996; 2000b; per esempio). Se la convinzione (debole) dell'insegnante è che il linguaggio che si usa in matematica sia univocamente ed eternamente determinato a priori dalla comunità scientifica, non potrà che pretendere dall'allievo un cieco uso di esso, senza vie personali; il che porta spesso ad una sorta di tentativo di imitazione acritica da parte dello studente, una sorta di vuota e sterile malacopia del linguaggio che costituisce per la classe un miraggio inarrivabile; in D'Amore (1993) abbiamo chiamato "matematichese" questa lingua d'aula, dando varie prove della sua esistenza e dei suoi caratteri negativi.
"Come" si apprende la matematica non è solo problema psicologico, pedagogico o didattico, come potrebbe ingenuamente apparire; poiché il "come" è strettamente legato al "che cosa", l'apprendimento matematico è anche fatto concernente l'epistemologia; per esempio, c'è chi crede che l'apprendimento della nostra disciplina possa ridursi a mero calcolo (a vari livelli), come se questo fosse il *senso* della matematica; questa caratteristica fortemente strumentale intrinseca è molto più diffusa di quanto non si creda: come si può pensare che un giovane arrivi a *costruirsi* conoscenze matematiche? In una visione epistemologica *realista*, questa posizione potrebbe anche trovare posto, dato che i concetti matematici sono punto d'arrivo ideale; mentre in una visione *pragmatista* il concetto è quella costruzione personale mano a mano raggiunta (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001; D'Amore, 2003a), nel passaggio da un rapporto personale al sapere, verso un rapporto istituzionale, in una visione antropologica (Chevallard, 1992).

Che l’apprendimento matematico sia fortemente legato alla noetica, intesa come apprendimento concettuale, è fuor di dubbio; è sotto gli occhi di tutti e confermato da vari Autori (Duval, 1993; 1995). Proprio sotto la spinta di Duval, negli ultimi anni abbiamo dedicato molte delle mie energie di ricerca a questo tema; ci limitiamo ad indicare D’Amore (2003a, b). Che la matematica sia costretta a servirsi di rappresentazioni all’interno di registri semiotici è pure fatto oramai accettato, anzi considerato ovvio, dopo gli studi pionieristici di Duval. Che vi sia un paradosso cognitivo nel fatto che uno studente debba costruire conoscenza concettuale attraverso rappresentazioni semiotiche (il “paradosso di Duval”) (nelle loro tre caratteristiche essenziali: rappresentazione, trasformazione di trattamento, trasformazione di conversione) (Duval, 1993, 1995; D’Amore, 2003a, b) è pure idea ampiamente condivisa, tanto che in D’Amore (2003a) si è iniziata un’operazione di ricucitura tra le teorie didattiche di Brousseau e le osservazioni di Duval, mostrando come elementi dell’una siano spiegabili attraverso quelli dell’altra; in particolare, si è mostrato come a volte non abbia successo una situazione a-didattica a causa del fallimento della devoluzione proprio a causa dell’incapacità dello studente di giungere alla noetica grazie all’azione sulla semiotica. Da tutto ciò si evince con la massima evidenza che un insegnante non può fingere di ignorare la questione, confondendo, come spesso capita, noetica con semiotica: lui, adulto, colto, esperto, *insegnante*, appunto, crede di operare didatticamente sui concetti, mentre lo studente, giovane, non colto, sta operando su rappresentazioni semiotiche (al più su sistemi di rappresentazioni semiotiche). Ignorare questo *fatto* comporta uno iato tra le due azioni (quella dell’insegnare e quella dell’apprendere) che non può non produrre fallimento.
Esistono a nostro avviso molti altri fattori che sono di tipo “trasversale” e che hanno in comune la necessità dello studio dell’epistemologia della matematica; qui volevamo solo mostrarne alcuni a mo’ di esempio.

8. I fattori didattici (o professionali)

Abbiamo messo in evidenza perché sia necessaria la competenza in epistemologia della matematica per preparare futuri docenti di matematica, facendo cenno sia a motivi culturali sia a motivi didattici (o professionali). Qui affronteremo con più dettagli proprio questa ultima motivazione.

8.1. Ostacoli epistemologici

Tutti i ricercatori in didattica della matematica conoscono la fondamentale "teoria degli ostacoli" di Guy Brousseau (1983, 1986, 1989; si veda anche D'Amore, 1999a, per una trattazione all'interno di una teoria complessa che coinvolge tutta la didattica della matematica). Per quanti distinguo si possano fare, resta fondamentale, per la gestione della vita di classe e per l'analisi degli errori (con tutto quel che ciò comporta nel campo della valutazione), la distinzione in tre tipologie di ostacoli:
ontogenetici
didattici
epistemologici (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sbaragli, 2008).
Se prendiamo il "triangolo della didattica" (Chevallard, 1985) come modello della situazione d'aula (soprattutto per evidenziare la sua complessità sistemica) (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2002), allora si può azzardare come prima approssimazione che gli ostacoli:
ontogenetici sono ascrivibili al vertice "allievo"
didattici sono ascrivibili al vertice "insegnante"
epistemologici sono ascrivibili al vertice "Sapere".
Questo modo di vedere le cose dà unitarietà alla didattica come teoria e chiarifica dei legami altrimenti sfuggenti. In tal caso, però, risulta ovvio che questo strumento potenzialmente eccezionale produce risultati positivi nelle mani dell'insegnante se e solo se egli ne ha consapevolezza (raggiunta grazie agli studi di didattica); ma, per quanto concerne il terzo punto, egli ha bisogno di una conoscenza in più, quella di epistemologia, appunto, per poter almeno riconoscere, tra gli inevitabili fallimenti dei propri studenti, quelli ascrivibili proprio ad ostacoli epistemologici. In questo caso, la didattica da sola non ce la fa e chiede aiuto alle competenze epistemologiche.

8.2. Cambi di convinzioni

Sappiamo oggi molto bene che le competenze maturate da insegnanti di matematica in formazione producono in essi cambi di convinzioni ed addirittura di concezioni.[3] Siccome su questo tema la bibliografia è

[3] La distinzione tra questi due termini, a prima vista sinonimi, è oggi abbastanza condivisa in ambiente di ricerca; si usa fare una differenza più o meno esplicitabile come segue (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2004):

impressionante, rinviamo qui solo a D’Amore, Fandiño Pinilla (2004), nel quale la bibliografia è fortemente selezionata. In questo lavoro si narra di una ricerca tesa ad evidenziare proprio i cambi di convinzioni e di concezioni su matematica, didattica della matematica e ruolo del docente di matematica, da parte di insegnanti di scuola secondaria in formazione iniziale, a seguito di 4 semestri di SSIS a Bologna. La cosa ha particolare interesse, qui, perché, pur essendoci a Bologna 2 corsi specifici di epistemologia/storia della matematica, i 2 corsi di didattica della matematica sono a forte contenuto problematico ed epistemologico, seguono la cosiddetta “scuola francese” e pongono molte questioni fondazionali (i corsi contemplano lo studio di vario materiale, tra cui D’Amore, 1999a, che viene discusso oralmente in lavori di gruppo, per 2 semestri). Rinviamo ancora al testo D’Amore, Fandiño Pinilla (2004) per i dettagli, ma risulta interessante quanto gli stessi specializzandi dichiarano a proposito dei propri notevoli cambi: sempre sono mescolate motivazioni didattiche con motivazioni epistemologiche, segno del fatto che gli studenti, proprio perché futuri professionisti della scuola, tendono a valutare le proprie nuove competenze epistemologiche in seno all’azione didattica.
Tra i cambi di convinzione che maggiormente stupiscono gli stessi insegnanti in formazione, emerge una differenza tra una precedente indisponibilità ad un uso improprio del linguaggio matematico ed una nuova disponibilità all’ascolto dell’allievo impegnato in una comunicazione a soggetto matematico. Su questo punto, grande influenza hanno le prove di tirocinio effettuate concretamente nelle aule; gli specializzandi cambiano radicalmente di convinzione sul *senso* da dare al contenuto matematico espresso dagli studenti in base principalmente a due fattori che hanno imparato a riconoscere nei corsi SSIS:
sebbene la comunicazione dallo studente A allo studente B sia (dal punto

---

- *convinzione* (belief) (o credenza): opinione, insieme di giudizi/attese, quel che si pensa a proposito di qualcosa;
- l’insieme delle convinzioni di qualcuno (A) su qualcosa (T) dà la *concezione* (K) di A relativamente a T; se A appartiene ad un gruppo sociale (S) e condivide con gli altri appartenenti ad S quell’insieme di convinzioni relativamente a T, allora K è la concezione di S relativamente a T.

Spesso, in luogo di “concezione di A relativamente a T” si parla di “immagine che A ha di T”.

di vista adulto) scorretta, B ne capisce il senso;
spesso l'uso del linguaggio è improprio (rispetto alle attese adulte) non per lacune matematiche ma per incomprensioni a monte.
Un esempio di questo secondo punto è dato dal comportamento di uno studente che, alla richiesta di definire il parallelogrammo risponde: «Un parallelogrammo è un quadrilatero con i lati a due a due». Si ha uno scollamento totale delle attese: da una parte l'insegnante avverte la mancanza di un aggettivo che "chiuda" la frase altrimenti senza senso; dall'altra parte lo studente ritiene che aver detto 12 parole esatte su 13 sia una buona performance. È vero che gioca molto il contratto didattico e la diversa concezione di matematica che hanno i due attori della storia, ma è anche vero che ci sono attese epistemologiche diverse per quanto concerne l'uso del linguaggio in matematica. (Sulle diverse componenti dell'apprendimento della matematica e soprattutto degli aspetti comunicativi, si veda Fandiño Pinilla, 2008).

8.3. Curricolo e centralità dell'allievo

Le osservazioni precedenti non possono non avere notevoli ripercussioni sul senso del curricolo; da pesante fardello da rispettare, il curricolo diventa strumento da plasmare e da sfruttare nella situazione vera d'aula, motivo conduttore della storia di classe. Da elenco più o meno commentato che viene calato in aula e condiziona tutto, il curricolo si trasforma in arma adatta a far sì che ogni studente sia messo, anche in base alle proprie capacità, nelle migliori condizioni per costruire competenze matematiche; da un curricolo normativo si passa proprio ad un curricolo che riflette punti di vista epistemologici (Fandiño Pinilla, 2002, pag. 36 e segg.: «il punto di vista epistemologico nella costruzione del curricolo»).
Ciò dà centralità alla figura dell'allievo, piuttosto che a quella della sequenza curricolare ed ai meri contenuti. E questo significa interpretare alla rovescia quella che in D'Amore (1999b) si chiama "epistemologia dell'apprendimento della matematica": il problema reale di chi si occupa di didattica della matematica, come ricerca o come professione, è di capire i processi di apprendimento della matematica, non limitarsi a creare ideali insegnamenti.

8.4. Influenza sulla valutazione

Specie dagli ultimi paragrafi, emerge qui una visione complessa della valutazione come processo e non come fine, dunque come strumento didattico. In Fandiño Pinilla (2002, pag. 75 e segg.) si propone una valutazione con vari scopi: valutazione del curricolo, autovalutazione dell'efficacia del processo di insegnamento, valutazione per dare informazioni su quel che conta, valutazione per prendere decisioni, valutazione per giudicare un allievo… Quanto poi agli scopi ed alle tecniche di ciascuna di queste accezioni, la cosa è complicata proprio perché spesso, per prendere decisioni, occorre far precedere scelte a carattere epistemologico (si veda l'evoluzione storico-sociale dell'idea di valutazione negli ultimi 100 anni, alle pagg. 94-96 del testo citato poche righe fa; e l'elenco delle funzioni e delle caratteristiche della valutazione nei vari Autori, a seconda delle scelte epistemologiche, alle pagg. 97-98). Una innovazione nella valutazione comporta scelte di criteri ed è per questo che si chiama "valutazione criteriale". A frenare queste specifiche spinte innovative (che, in altri Paesi, sono addirittura diventate norme di legge nella scuola), stanno certo le convinzioni degli insegnanti e molte delle loro concezioni su scuola, senso dell'istruzione etc., in generale, e su matematica, senso dell'apprendimento matematico etc., in modo più specifico.

Ma abbiamo visto come le convinzioni epistemologiche, anche quando mancano o sembrano mancare (Speranza le chiama: *implicite*, 1997), influenzino decisamente tutte le altre, così che il cerchio si chiude…

Tra le scelte, non sempre implicite, emergono con una certa percentuale, quegli atteggiamenti che, più o meno, rispecchiano modi di interpretare la matematica e che si rifanno a scuole epistemologiche: formalismo, platonismo, logicismo, empirismo, intuizionismo alla Poincaré, intuizionismo come costruzione di atti del pensiero, …;

ed oggi, più in generale, ascrivibili a due grandi gruppi (Speranza, 1997; D'Amore, 1987): realismo, pragmatismo, che li riassumono (D'Amore, 2003b).

Ma l'uso delle convinzioni maturate con gli studi epistemologici deve fare coppia con la competenza forte in didattica della matematica perché solo così contribuisce a formare quella *ferramenta*, quegli strumenti pratici e teorici così utili nella professione docente, per capire l'evoluzione delle situazioni d'aula. A ciò giova certo l'enorme contributo di Guy Brousseau che, lungi dall'essere solo pionieristico e limitato ai primi passi della didattica della matematica, fornisce ancora oggi, a mio avviso, materiale sul quale riflettere, in costante evoluzione ed approfondimento. Idee come il contratto didattico, la teoria degli ostacoli, la teoria delle situazioni,… ma anche le spietate analisi che hanno portato alla scomparsa di precedenti modi di interpretare la didattica, sono ancora tutte da analizzare e potenzialmente vi sono ancora misteri da chiarire.

9. Epistemologia e storia della matematica; la storia come chiave di volta per capire l'epistemologia; uso della storia nella didattica della matematica

9.1. Epistemologia e Storia della matematica

«La filosofia senza la storia è vuota, la storia senza la filosofia è cieca», asseriva a ragione Kant (per esempio: Speranza, 1997, pag. 145). Circostanziava Lakatos: «La filosofia della scienza senza la storia è vuota, la storia della scienza senza la filosofia della scienza è cieca» (Lakatos, 1971, pag. 102).
Accettata la presa di posizione di tali giganti, ogni commento è superfluo. Va da sé che, se più volte abbiamo detto che l'epistemologia studia l'evoluzione dei concetti, non è pensabile scindere gli studi di epistemologia della matematica da quelli di storia della matematica.

9.2. La storia per capire l'epistemologia

Così, appare ovvio pensare alla storia come al riferimento paradigmatico per eccellenza per capire l'evoluzione delle idee e le necessità di adeguamento del pensiero. Per esempio, se nulla si sapesse delle origini aristoteliche della geometria euclidea, né delle geometrie non euclidee con la loro portata di rivoluzione sul concetto di verità matematica, né della necessità di un nuovo rigore che desse ai termini primitivi ed agli assiomi un *senso* moderno, non si potrebbe capire il perché David Hilbert abbia dovuto scrivere dei nuovi elementi di geometria 22 secoli dopo quelli di Euclide. Vediamo dunque la storia della matematica come il riscontro oggettivo per capire l'epistemologia.

9.3. Uso della storia nella didattica

Sebbene entrambi i punti precedenti siano di eccezionale rilevanza, tali da dare ragione a chi impone corsi di epistemologia agli insegnanti in formazione, c'è un punto emergente con grande forza negli ultimi 30

anni, un punto al quale Francesco Speranza e Bruno D'Amore hanno dato corpo curando le edizioni di 3 libri che raccolgono esperienze vere di insegnanti a diversi livelli scolastici, quando ciò ancora non era diffuso affatto (D'Amore, Speranza, 1989, 1992, 1995); si tratta dell'uso della storia della matematica come strumento didattico a vario titolo nei corsi di matematica.
Siccome questo punto è strettamente intrecciato con le questioni epistemologiche, ci pare corretto parlarne qui. D'altra parte, se si vuol usare la storia della matematica in aula, bisogna conoscere la storia della matematica; dunque ha senso il problema di porsi anche la questione della preparazione in storia dei docenti in formazione.

9.4. La storia della matematica nella formazione dei futuri insegnanti di matematica

Secondo Freudenthal, imparare la matematica significa "reinventarla" (si descrive un processo denominato "mathematising") (Freudenthal, 1973): dunque il ruolo della componente storica nell'insegnamento merita un approfondimento specifico. La considerazione di un concetto matematico attraverso la sua evoluzione storica richiede però l'assunzione di posizioni epistemologiche impegnative: la stessa selezione dei dati storici non è neutra (Radford, 1997) e problemi notevoli sono inoltre connessi alla loro interpretazione, inevitabilmente condotta alla luce dei nostri attuali paradigmi culturali, mediante i quali si pongono in contatto culture "diverse ma non incommensurabili" (Radford, Boero, Vasco, 2000, pag. 165).
Abbiamo già insistito molto sul fatto che l'insegnamento sia influenzato dalle concezioni dei docenti a proposito della natura della conoscenza scientifica e della sua evoluzione. Appare dunque fondamentale che un insegnante si confronti direttamente con la storia della disciplina e che giunga a saper impiegare i riferimenti storici consapevolmente e coerentemente con le proprie concezioni epistemologiche (Thompson, 1992; Moreno, Waldegg, 1993; Speranza, Grugnetti, 1996).
In generale, la storia della matematica offre alla didattica alcune importanti possibilità (Furinghetti, Somaglia, 1997):
innanzitutto quella di un approccio aneddotico che, pur essendo talvolta considerato superficiale, può rinforzare in termini apprezzabili la motivazione dei discenti (D'Amore, Speranza, 1989, 1992, 1995; Radford, 1997; D'Amore, 1999a);

la possibilità di una riflessione metacognitiva;
la possibilità di una conoscenza organica di un periodo storico e della comprensione delle situazioni culturali che hanno influenzato la nascita o la diffusione di un'idea matematica.
Riferendoci a quel vertice del triangolo della didattiche che abbiamo chiamato Sapere (Chevallard, 1985), chiameremo "conoscenza istituzionalizzata" l'ultima versione, dal punto di vista cronologico, del sapere considerato, dunque la sua più recente forma accettata dalla comunità scientifica: da ciò segue che l'istituzionalizzazione alla quale facciamo riferimento viene ad essere fortemente contestualizzata dal punto di vista storico; e tale contestualizzazione è connessa ai diversi ambienti socio-culturali (Bagni, 2004). A questo punto entra però in gioco la componente storica: è infatti rarissimo (o forse impossibile) che una conoscenza matematica nasca da un'idea assolutamente nuova, priva di connessioni con l'esperienza del passato: per molti versi una conoscenza incorpora in sé stessa le proprie radici storiche. Quale rapporto collega la conoscenza istituzionalizzata alla propria storia?
Tale problematica ci spinge ad un'indagine più approfondita della struttura storica di una conoscenza matematica che, come vedremo, potrà influenzare notevolmente la didattica. Seguendo D'Amore (2001a), potremmo ad esempio chiederci: il progressivo incremento del sapere può essere assimilato ad un processo di affiancamento (accumulazione quantitativa) o di sovrapposizione (qualitativa)? Ovvero: la reimpostazione di un oggetto matematico si affianca alle vecchie versioni o le rimpiazza? (D'Amore 2001b).
L'adozione di modelli di (puro) affiancamento o di (pura) sovrapposizione comporterebbe problemi teorici: tali modelli risentirebbero di un'impostazione decontestualizzata. La concezione dell'evoluzione del sapere K che preveda l'affiancamento di una conoscenza K(m+1) alla K(m) non tiene conto che la K(m) aveva senso nel suo originale contesto C(m), mentre la K(m+1) risente del nuovo contesto socio-culturale C(m+1) venutosi a creare (in Bagni, 2005 è esaminato, a mo' di esempio, il caso dei procedimenti infinitesimali). D'altro canto, la sovrapposizione dei concetti porterebbe ad una continua rifondazione ex novo, mentre la (progressiva) variazione dell'ambiente socio-culturale fa pensare a progressivi reinquadramenti.
In un momento storico (ad esempio, nel momento attuale) ed in un contesto socio-culturale C(n) determinato, possiamo pensare a processi

in cui le versioni "storiche" della conoscenza considerata vengono a far parte del sapere in relazione ai contesti socio-culturali in cui si sono sviluppate; per questo motivo, il processo va inteso come una continua evoluzione cronologica, in continuo divenire.

Torniamo ora all'aspetto didattico: descritto il sapere specifico della conoscenza K, è necessario procedere alla sua trasposizione didattica, cioè in sapere insegnato. Abbiamo già visto che importanza riveste, in questa trasformazione, l'epistemologia; ed ora ci chiediamo: che ruolo si riconosce, in questa fase, alla storia di K? In particolare, come si differenziano le modalità della trasposizione della conoscenza K(n) (istituzionalizzata al momento in cui si considera il processo di insegnamento-apprendimento) da quelle della trasposizione dei riferimenti che costituiscono la "storia di K"? Il punto cruciale è costituito dalla trasposizione della "storia di K" (Gadamer, 1975).

Indichiamo due scelte possibili:

la trasposizione di K(1), K(2), ..., K(n–1) con riferimento al contesto C(n) (*attualizzazione*);

la trasposizione di K(1), ..., K(n–1) con riferimento ai rispettivi contesti C(1) C(2), ..., C(n–1) (*contestualizzazione storica dei riferimenti*).

Ciascuna opzione si basa evidentemente su assunzioni epistemologiche impegnative e presenta, dal punto di vista didattico, aspetti delicati:

un'evoluzione storica *proposta didatticamente* dall'unico punto di vista moderno non sarebbe forse radicalmente inaccettabile (mentre un'interpretazione platonista della storia in senso assoluto lascia oggi scettici e perplessi); una tale concezione permette, ad esempio, di presentare agli allievi gli ostacoli epistemologici principali e di chiarire alcune posizioni storiche la cui debolezza si è rivelata successivamente (Sfard, 1991);

ma un'impostazione che pretenda di far seguire allo sviluppo cognitivo un percorso modellato sull'evoluzione storica (Piaget, Garcia, 1983) incontrerebbe difficoltà teoriche e qualche dubbio fondazionale.

La presentazione di elementi storici con riferimento al proprio contesto socio-culturale (Radford, 2003) offre la possibilità di un organico approfondimento e induce riflessioni fondamentali sulla genesi di un concetto (Radford, Boero, Vasco, 2000). La scelta di una storia "interna", di uno sviluppo isolato della matematica, appare problematica (Grugnetti, Rogers, 2000, pag. 40) e difficilmente sostenibile dal punto di vista epistemologico.

Questo, solo per tracciare un panorama ridotto della complessità della gestione della storia ad uso didattico; sta bene tentare un approccio aneddotico per motivare, ma non è questa la vera e propria sfida cognitiva vincente. Non appena si tenta qualche cosa di più significativo, ecco sorgere problemi e sfide di grande interesse che possono e devono essere affrontate dal docente di matematica con profonda consapevolezza.

In ogni caso, storia ed epistemologia sono strettamente intrecciate tra loro ed il loro sistema lo è con la didattica della matematica. Tanto che si potrebbe seguire la via aperta da Kant e caldeggiata da Lakatos, coniando un ulteriore motto:

La didattica della matematica senza relazioni con la epistemologia e la storia è come uno strumento agile e potente che nessuno sa usare a pieno; la epistemologia e la storia sono mezzi culturali forti astratti e profondi che la didattica della matematica rende concreti ed utili al progresso dell'umanità, alla costruzione di competenze, alla consapevolezza del proprio sapere.

Riferimenti bibliografici

Artigue M. (1990). Ingégnerie didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*. 9, 3, 281-307.

Artigue M. (2000). L'insegnamento e l'apprendimento della Matematica a livello universitario. *La matematica nella società e nella cultura. Bollettino dell'U.M.I.* S. VIII, III-A, 81-103.

Arzarello F., Bartolini Bussi M. (1998). Italian trends in research in Mathematics Education: a national case study in the international perspective. In: Kilpatrick J., Sierpinska A. (eds.) (1998). *Education as research domain: a search far identity.* Vol. 2, 243-262. London: Kluwer Ac. Publ. [Un sunto di questo articolo fu il tema di una conferenza di Ferdinando Arzarello nel Convegno U.M.I. di Padova nel 1995 e dunque appare in quegli Atti].

Bachelard G. (1951). *L'activité rationaliste de la physique contemporaine*. Paris: PUF.

Bagni G.T. (2004). Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche. *La matematica e la sua didattica*. 3, 51-70.

Bagni G.T. (2005). Historical roots of limit notion. Development of its representative registers and cognitive development. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*. 21, 2, 124-138.

Bartolini Bussi M. (1994). Theoretical and empirical approaches to classroom interation. In: Biehler R., Scholz R.W., Strässer R., Winkelmann B. (eds.) (1994). *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht,

Kluwer. 121-132.
Blanco L. (1991). Interacciòn didàctica en la enseñanza de las maternàticas con estudiantes de magisterio. *Revista Jnteruniversitaria de Formaciàn del Profesorado*. 57-68.
Brousseau G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 4, 2, 165-198.
Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7, 2, 33-115.
Brousseau G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In: Bednarz N., Garnier C. (eds.) (1989). *Constructions des savoirs, obstacles et conflits*. 41-64. Montreal: Agence d'Arc.
Brousseau G. (2008a). *Ingegneria didattica e epistemologia dell'insegnante*. Bologna: Pitagora.
Brousseau G. (2008b). L'epistemologia scolastica spontanea e la cultura dei problemi matematici. *La matematica e la sua didattica*. 23, 2, 165-183.
Brun J., Conne F. (1990). Analyses didactiques des protocoles d'observation du déroulement de situations. *Education et recherche*. 3, 261-285.
Carrillo J., Contreras L. (1995). Un modelo de categorias e indicadores para el anàlisis de las concepciones del profesor sobre la matemàtica y su enseñanza. *Educación Matemática*. 7, 3, 79-92.
Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche antropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*. 12, 1, 73-112.
D'Ambrosio U. (2002). *Etnomatematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B. (1986). Il ruolo della definizione nella didattica della matematica. *Insegnare*. 6, 9-13.
D'Amore B. (1987). Motivazioni epistemologiche che stanno alla base delle scelte didattiche operate nelle attività educative in Italia dalla scuola dell'infanzia al biennio superiore. In: Atti del "II Congreso Internacional sobre investigación en la didáctica de las Ciencias y de la Matematica". Valencia 1987, 323-324.
D'Amore B. (1993). Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico. *La matematica e la sua didattica*. 3, 289-301.
D'Amore B. (1996). Schülersprache beim Lösen mathematischer Probleme. *Journal für Mathematik Didaktik*. 17, 2, 81-97.
D'Amore B. (1998). Venti anni, o poco più, di didattica matematica nella scuola dell'infanzia. Che cosa è cambiato? *Infanzia*. 1, 7-11.
D'Amore B. (1999a). Il ruolo essenziale ed insostituibile delle didattiche disciplinari nella costruzione della conoscenza nell'educazione. *Pitagora*

Notizie. 4, 2.
D'Amore B. (1999b). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B. (2000a). La didáctica de la matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses. *Educación Matematica*. México D.F., México. 12, 1, 239-50.
D'Amore B. (2000b). Lingua, Matematica e Didattica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 28-47.
D'Amore B. (2000c). La complessità dell'educazione e della costruzione dei saperi. *Riforma e didattica*. 4, 35-40.
D'Amore B. (2001a). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica", *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-30.
D'Amore B. (2001b). Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Belgio. XXXVIII, 1, 17-46.
D'Amore B. (2002a). Basta. *La Vita Scolastica*. 8, 1° gennaio 2002, 14-18.
D'Amore B. (2002b). Il problema della formazione degli insegnanti di matematica. In: Lucchini G., Mercanti F., Tallini L. (eds.) (2002). *Per una nuova scuola: programmi, formazione e tecnologie innovative per l'insegnamento della matematica*. Atti del Congresso nazionale della Mathesis, 23-25 novembre 2001, Mantova. 71-76. Una successiva versione, ampliata decisamente, ma con lo stesso titolo, appare sulla rivista *Rassegna*, in corso di stampa.
D'Amore B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51.
D'Amore B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B. (2004). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*. 4, 4-30.
D'Amore B. (2006). Basi epistemologiche della Didattica della Matematica. In: D'Amore B. (editor) (2006). *Matematica: l'emergere della didattica nella formazione*. *Rassegna*. XIV, 29, 8-14.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (2001). La "matematica del quotidiano". *La matematica e la sua didattica.* 3, 256-263.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2001). Concepts et objects mathématiques. In: Gagatsis A. (ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Nicosia (Cipro): Intercollege Press Ed. Atti del

“Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno - 6 luglio 2001. 111-130.
D’Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (2002). Un acercamiento analitico al “triángulo de la didáctica”. Educación Matemática (México DF). 1, 4, 48-62.
D’Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2003). La formazione iniziale degli insegnanti di matematica in Italia. In: Fandiño Pinilla M.I. (ed) (2003). *Riflessioni sulla formazione iniziale degli insegnanti di matematica: una rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora. 75-104.
D’Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzioni in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50.
D’Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson.
D’Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2007). *Le didattiche disciplinari*. Trento: Erickson.
D’Amore B., Godino D.J., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.
D’Amore B., Plazzi P. (1990). Intuizione e rigore nella pratica e nei fondamenti della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 3,18-24.
D’Amore B., Speranza B. (eds.) (1989). *Lo sviluppo storico della matematica - Spunti didattici*. Volume primo. Roma: A. Armando.
D’Amore B., Speranza F. (eds.) (1992). *Lo sviluppo storico della matematica - Spunti didattici*. Volume secondo. Roma: A. Armando.
D’Amore B., Speranza F. (eds.) (1995). *La matematica e la sua storia. Alcuni esempi per spunti didattici*. Milano: Angeli ed.
Douady R. (1993). *L’ingégnerie didactique*. Cahier de DIDIREM, 19. Paris: Université Paris VII.
Douady R., Robert A. (1992). Quelques réflexions sur l’observation en classe en formation professionelle initiale des futures enseignants. *Actes de la COPIRELEM*. Pau-Nice.
Droz R. (1980). *Observations sur l’observation*. Avignon: Groupe Dupont.
Duval R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational studies in mathematics*. 22, 233-261. [Esiste una traduzione in lingua italiana: *La Matematica e la sua didattica*. 4, 1996, 370-393].
Duval R. (1992-1993). Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*. 31, 37-61. [Esiste una traduzione italiana: *La Matematica e la sua didattica*. 2, 1996, 130-152; appare anche come Volume 1 nella Collana: Bologna-Querétaro (1998). Bologna: Pitagora].
Duval R. (1993). Registres de répresentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 5, 37-

65.
Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: régistres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
Eugeni F. (1999). Divulgazione e didattica della Matematica. Testo di una conferenza tenuta il 4 maggio 1999 presso il Politecnico di Milano, sede di Mantova, nell'àmbito dei Convegno nazionale: *«Ricerca, divulgazione e didattica in Matematica»,* a cura di F. Mercanti. Gli Atti, non pubblicati, sono tuttavia disponibili presso la sede del Convegno o via e-mail.
Fandiño Pinilla M. I. (2001). La formazione degli insegnanti di matematica. Alcuni riferimenti ad un quadro teorico. *La Matematica e la sua didattica.* 4, 352-373.
Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.
Fandiño Pinilla M.I. (ed) (2003). *Riflessioni sulla formazione iniziale degli insegnanti di matematica: una rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora.
Fandiño Pinilla M.I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson.
Freudenthal H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dodrecht: Riedel.
Furinghetti F. (2001). Credenze/convinzioni in classe su matematica e dintorni. In: D'Amore B. (ed.) (2001). *Didattica della Matematica e rinnovamento curricolare.* Atti del Convegno nazionale omonimo "Incontri con la Matematica" n. 15, Castel San Pietro Terme, 9-11 novembre 2001. Bologna: Pitagora. 59-70.
Furinghetti F., Radford L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In: English L. (ed.) (2002). *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Hillsdale: Erlbaum. 631-654.
Furinghetti F., Somaglia A. (1997). Storia della matematica in classe. *L'educazione matematica*. XVIII, V, 2, 1.
Gadamer H.G. (1975). *Truth and Method*. New York: Crossroad (2nd ed.: 1989).
Godino J.D., Batanero C. (1998). The dialectic relationships among theory, development and practice in Mathematics Education: a meta analysis of three investigations. In: Malara N. (ed.) (1998). *Proceedings of Working Group 25 – ICME 8, Sevilla July 1996. An international view on Didactics of Mathematics as a scientific discipline*. Modena: CNR. 13-22. [Esiste una traduzione in lingua italiana: *La Matematica e la sua didattica*. 4, 1998, 402-422].
Grugnetti L., Rogers L. (2000). Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. In: Fauvel, J., van Maanen J. (eds.). *History in Mathematics Education*. Dodrecht: Kluwer. 39-62.

Houdement C., Kuzniak A. (1996). Autour des strategies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 16.3.
Hoyles C. (1997). The curricolar shaping of student’s approaches to proof. *For the learning of mathematics*. 17, 1, 7-15. [Esiste una traduzione in lingua italiana: *La Matematica e la sua didattica*. 1998, 3, 248-270. Appare anche come Volume 5 nella Collana: Bologna-Querétaro (1998). Bologna: Pitagora].
Lakatos I. (1971). *History of science and its rational reconstructions*. Cambridge: Cambridge U.P.
Loria G. (1933). Commission internationale de l’enseignement mathématique. La préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l’enseignement secondaire dans les diverses pays. I. Rapport général. L’enseignement mathématique. XXXII, 5-20.
Kintzler C. (1989). Éléments. In: AA. VV. (eds.) (1989). *Écrits de Condorcet*. Paris, Edilig.
Moreno L., Waldegg G. (1993). Costructivism and mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 24, 5, 653-661.
Pellerey M. (1989). *Oltre gli insiemi*. Napoli: Tecnodid.
Piaget J., Garcia R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris: Flammarion.
Porlàn R. e altri (1996). Conocimiento profesional deseable y profesores inovadores. *Investigación en la Escuela.* 29, 23-37.
Portugais J. (1995). *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*. Berne: Peter Lang.
Radford L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 17, 1, 26-33.
Radford L. (2003). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. In: Anderson M. et Al. (eds.). *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*. Ottawa: Legas. 49-79.
Radford L., Boero P., Vasco C. (2000). Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. In: Fauvel J., van Maanen J. (eds.) (2000). *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer. 162-167.
Schoenfeld H. (2000). Obiettivi e metodi di ricerca in Didattica della Matematica. *La matematica nella società e nella cultura. Bollettino dell’U.M.I.* S. VIII, III-A, N. 2, 81-103.
Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections

on processes and objects as different sides of the same coins. *Educational Studies in Mathematics*. 22, 1-36.
Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica.* Bologna: Pitagora.
Speranza F., Grugnetti L. (1996). History and epistemology in didactics of mathematics. In: Malara N.A., Menghini M., Reggiani M. (eds.) (1996). *Italian research in mathematics education*, Roma: CNR. 126-135.
Thompson A.G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. London: D.A.N.Y. McMillan, 127-208.
Vailati G. (1896). Sull'importanza delle ricerche relative alla storia della scienza. In: Vailati G. (1911). *Scritti*. Firenze – Leipzig: Seeber-Barth.
Watzlawick W., Beavin J.H., Jackson D.D. (1967). *Pragmatic of the human communication*. New York: W.W. Norton & C. [Trad. it.: Roma, Astrolabio, 1971].

Parole chiave: formazione degli insegnanti di matematica; didattica della matematica nella formazione degli insegnanti; epistemologia e storia della matematica nella formazione degli insegnanti; valutazione in matematica; competenze e matematica.

Key words: mathematics teachers' training; mathematics education in teachers' training; epistemology and history of mathematics in teachers training; assessment in mathematics; competence and mathematics.